Opción A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 2 de 1999.

Considera las funciones $f : R \to R$ y $g : R \to R$ definidas por $f(x) = x^2 + 3x +2$ y $g(x) = -x^2 - 3x + 10$

(a) [1 punto] Representa gráficamente ambas funciones.

(b) [1'5 puntos] Halla el área de la región del plano que está formada por todos los puntos (x,y) que cumplen $f(x) \le y \le g(x)$

Solución

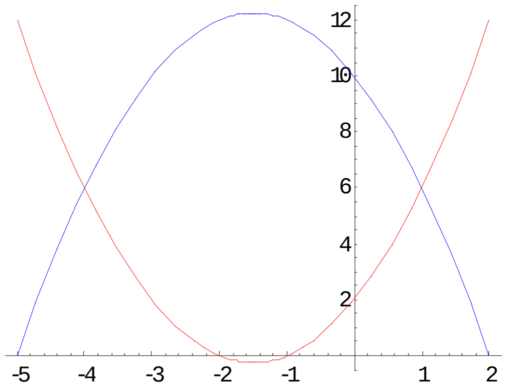
(a)

Las funciones $f(x) = x^2 + 3x +2$ y $g(x) = -x^2 - 3x + 10$ son parábolas, por tanto con sus vértices prácticamente podemos dibujarlas sabiendo que f tiene las ramas hacia arriba y g hacia abajo

La abcisa del vértice es la solución de $f' = 0$ y de $g' = 0$, pues son extremos relativos.

El vértice de f es (-3/2, -1/4) y el vértice de g es (-3/2, 49/4)

Las graficas son



(a)

Nos están pidiendo el área encerrada por las funciones f(x) y g(x) para lo cual tenemos que calcular los puntos donde coinciden, es decir las soluciones de la ecuación f(x) = g(x).

$x^2 + 3x + 2 = -x^2 - 3x + 10$, es decir $2x^2 +6x - 8 = 0$. Sus soluciones son $x = -4$ y $x = 1$. Luego

$$\text{Area}=\int_{-4}^{1}(g(x)-f(x))dx=\int_{-4}^{1}(-2x^2-6x+8)dx=\left|\frac{-2x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+8x\right|_{-4}^{1}=$$

$= [(-2/3 - 3 + 8) - (- 2.(-4)^3/3 - 3\cdot16 - 32)] = -2/3 + 5 - 128/3 + 80 = 125/3$ u. a.

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 2 de 1999.

[2'5 puntos] Calcula las asíntotas de la gráfica de la función f definida para x = - 1 por $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x+1}$, y estudia la posición de dicha gráfica con respecto a las asíntotas

Solución

$$f(x)=\frac{x^2+3x+1}{x+1}$$

La recta x = -1 es una asíntota vertical de f(x) porque

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} [(x^2+3x+1) / (x+1)] = - 1 / 0^+ = - \infty$

Análogamente $\lim_{x\to -1^-} f(x) = - 1 / 0^- = + \infty$

Y ya tenemos la posición de la gráfica respecto a la asíntota vertical.

Como en la función f(x) el numerador es un grado mas que en el denominador, tenemos una asíntota oblicua de la forma y = mx + n (es la misma en $+\infty$ y en $-\infty$) con

$m = \lim_{x\to\infty} [f(x) / x] = \lim_{x\to\infty} [(x^2+3x+1) / x.(x+1)] = 1$

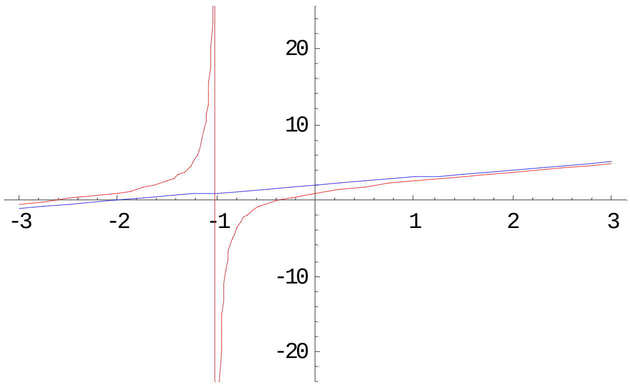
$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} [(x^2+3x+1) / (x+1) - x] = \lim_{x\to\infty} [(2x+1) / (x+1)] = 2$

Luego la asíntota oblicua es y = mx + n = x + 2

Como $\lim_{x\to\infty} [f(x) - (x+2)] = 0^-$, la gráfica está por debajo en $+ \infty$

Como $\lim_{x\to -\infty} [f(x) - (x+2)] = 0^+$, la gráfica está por encima en $- \infty$

Aunque no la piden la gráfica es



Donde la asíntota oblicua está en azul

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 2 de 1999.

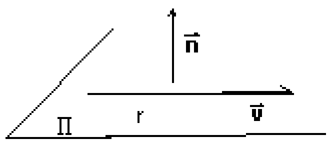
Considera el plano Π y la recta r dados por $\Pi \equiv ax + 2y - 4z + b = 0$ y $r \equiv \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z+3}{1}$

(a) [1'5 puntos] Halla los valores de a y b para los que r está contenida en Π.

(b) [1 punto] ¿Existe algún valor de a y algún valor de b para los que la recta r es perpendicular al plano Π.

Solución

(a)



$\Pi \equiv ax + 2y - 4z + b = 0$ y $r \equiv \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z+3}{1}$

Un vector normal de Π es **n** = (a,2,-4)

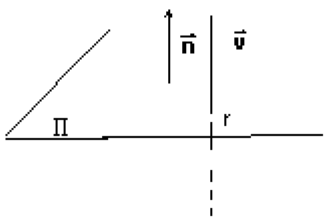
Un punto de la recta r es A(3,1,3), y un vector director es **v** = (4,-4,1)

Como la recta r está en el plano Π, los vectores **v** y **n** son perpendiculares y su producto escalar es cero, luego

(a,2,-4)•(4,-4,1) = 0 = 4a - 8 – 4 = 0, de donde a = 3

Como la recta r está en el plano Π, A $\in$ Π, es decir 3(3) + 2 – 12 + b = 0, de donde b = 1

(b)



Para que el plano Π y la recta r sean perpendiculares sus vectores normal y director tienen que ser dependientes, es decir **v** = λ **n**, es decir sus coordenadas tienen que ser proporcionales

a/4 = 2/-4 = -4/1

pero como 2/-4 $\neq$ -4/1, no existe ningún punto a ni b para que sean perpendiculares el plano y la recta.

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 2 de 1999.

Una persona trata de adivinar, mediante ciertas pistas, el coste de tres productos A, B y C que un amigo suyo ha comprado.

Pista 1: Si compro una unidad de A, dos de B y una de C me gasto 900 ptas.

Pista 2: Si compro m unidades de A, m + 3 de B y 3 de C me gasto 2950 ptas.

(a) [1 punto] ¿Hay algún valor de m para el que estas dos pistas no son compatibles?

(b) [1puntos] Si en la Pista 2 se toma m = 4, ¿es posible saber el coste de cada uno de l os productos?

(c) [2'5 puntos] Pista 3. el amigo le dice finalmente que el producto C vale 5 veces lo que vale el producto A y que en la Pista 2 se tiene m = 4. ¿Cuánto valen A, B y C?

Solución

(a)

A + 2B + C = 900

mA + (m+3)B + 3C = 2950

La matriz de los coeficientes M y la ampliada M^* son

$$M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ m & m+3 & 3\end{pmatrix} \quad y \quad M^*=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 900\\ m & m+3 & 3 & 2950\end{pmatrix}$$

De la matriz M^*, tenemos el menor $\begin{vmatrix}1 & 900\\ 3 & 2950\end{vmatrix} \neq 0$, por tanto rango($M^*$) = 2

Para que el sistema sea incompatible tiene que ser rango(M) = 1, es decir

$0=\begin{vmatrix}2 & 1\\ m+3 & 3\end{vmatrix}=6-m-3$, de donde m = 3

$0=\begin{vmatrix}1 & 1\\ m & 3\end{vmatrix}=3-m$, de donde m = 3

Luego tomando m = 3, el sistema es incompatible.

(b)

Si m = 4, tenemos

A + 2B + C = 900

4A + 7B + 3C = 2950

Son dos ecuaciones con tres incógnitas y rango (M) = rango(M^*) = 2, por tanto el sistema es compatible e indeterminado y depende de uno de ellos

(c)

Con la última condición C = 5A, el sistema es

A + 2B + C = 900

4A + 7B + 3C = 2950

C = 5A, resolviéndolo se obtiene A = 100, B = 150 y C = 500.

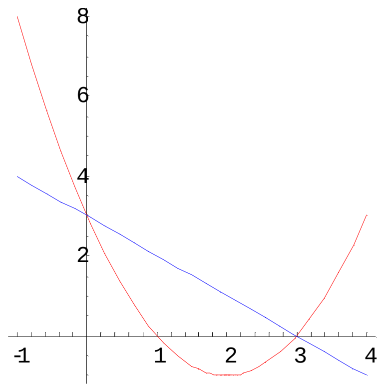
Opción B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 2 de 1999.

[2'5 puntos] Dibuja y halla el área de la región limitada por la recta y = - x +3 y la curva de ecuación $y = x^2 - 4x + 3$.

Solución

La parábola tiene las ramas hacia arriba y su vértice en el punto (2,-1) (su abcisa anula la primera derivada), por tanto las gráficas son



Para hallar el área de la región limitada por las dos funciones tenemos que calcular las soluciones de la ecuación $x^2 - 4x + 3 = -x + 3$, es decir $x^2 - 3x = 0$., de donde x = 0 y x = 3

$$\text{Area}=\int_0^3 \left[(-x+3)-(x^2-4x+3)\right]dx= \int_0^3 \left[-x^2+3x\right] dx=\left[\frac{-x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = -3^3/3 + 3.9/2 = 9/2 \text{ u.a.}$$

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 2 de 1999.

Una partícula se desplaza a lo largo de la curva de ecuación y = f(x) siendo $f : \Re \to \Re$ la función dada por

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\\ xe^x & \text{si } x \geq 0\end{cases}$$

(a) [1 punto] ¿Hay algún punto en la trayectoria de la partícula en el que dicha curva no admite recta tangente?.

(b) [1 punto] Determina las coordenadas del punto de la trayectoria en el que se alcanza la máxima altura.

(c) [0'5 puntos] ¿A que recta se aproxima la trayectoria cuando $x \to \infty$? Justifica la respuesta.

Solución

(a)

Si en un punto no existe la derivada en dicho punto no existe recta tangente. Veamos si existe f '(0)

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ xe^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} ; \quad f'(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ e^{-x}+xe^{-x}(-1) & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Existe f '(0) si y solo si $f'(0^+) = f'(0^-)$

$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0} [\, e^{-x}(1-x)\,] = e^0(1 - 0) = 1$

$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0} [\,0\,] = 0$

Como $f'(0^+) \neq f'(0^-)$, no existe f '(0), por tanto en x = 0 no existe recta tangente.

(b)

El máximo de f(x) es la solución de f '(x) = 0, comprobando que en f '' al sustituir de < 0

Tomamos la rama $f(x) = x.e^{-x}$

$f'(x) = e^{-x}(1-x) = 0$, como la exponencial no es cero, 1 – x = 0 de donde x = 1.

$f''(x) = -e^{-x}(1-x) + e^{-x}(-1) = e^{-x}(x-2)$

$f''(1) = e^{-1}(1-2) = e^{-1}(-1) < 0$, luego es un máximo

El punto máximo es $(1, 1.e^{-1}) = (1, 1/e)$

(c)

$\lim_{x \to +\propto} f(x) = \lim_{x \to +\propto} [x.e^{-x}] = \lim_{x \to +\propto} [x/e^{x}] = [\propto / \propto] =$

Aplicándole la regla de L'Hôpital

$= \lim_{x \to +\propto} [1/e^{x}] = 1/\propto = 0$, es decir se aproxima a la recta y = 0

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 2 de 1999.

Considera el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -1 \\ 2x + 5y + 4z &= -2 \\ x + 3y + m^2z &= m \end{aligned}$$

(a) [1 punto] Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro m

(b) [1 punto] Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado

(b) [0'5 puntos] Razona para que valores de m tiene inversa la matriz de los coeficientes del sistema.

Solución

(a)

Dado el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -1 \\ 2x + 5y + 4z &= -2 \\ x + 3y + m^2z &= m \end{aligned}$$

su matriz de los coeficientes M y su matriz ampliada M^* son

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & m^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & m^2 & m \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$, por lo menos rango(M) = 2

Para que rango(M) = 3 , tiene que ser $|M| \neq 0$. $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & m^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & m^2-3 \end{vmatrix} = m^2 - 3 + 2 = m^2 - 1.$

$|M| \neq 0$ si y solo si $m^2 - 1 \neq 0$, es decir si $m \neq \pm 1$

Si m = 1, tenemos que rango(M) = 2, y en M^* tenemos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, por tanto rango($M^*$) = 3 y el sistema es incompatible.

Si m = - 1, tenemos que rango(M) = 2, y en M^* tenemos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, por tanto rango($M^*$) = 2 y el sistema es compatible.

(b)

Si m = -1 el sistema es compatible e indeterminado, nos quedamos con las dos primeras ecuaciones

x + 2y + 3z = - 1

2x + 5y + 4z = -2

Tomando $z = \lambda$, nos resulta

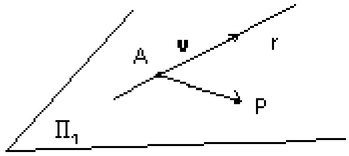
$x + 2y = -1 - 3\lambda$
$2x + 5y = -2 - 4\lambda$
Multiplicando por –2 la primera y sumándole a la segunda
$y = 2\lambda$, y sustituyendo en la primera queda $x = -1 - 7\lambda$, por tanto la solución del sistema es $(x,y,z) = (-1-7\lambda, 2\lambda,\lambda)$ con $\lambda \in \Re$
(c)
La matriz M tiene inversa si y solo si $|M| \neq 0$, es decir si $m \neq \pm 1$

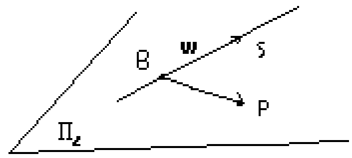
Ejercicio 4 de la opción B del modelo 2 de 1999.

[2’5 puntos] Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P = (1, 0, 2) y corta a las rectas r y s dadas por:

$$r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1} \qquad s \equiv \begin{cases} 2x+6y+2=0 \\ y+2z=0 \end{cases}.$$

Solución





Construimos la recta pedida como intersección de dos planos Π_1 y Π_2, que contienen respectivamente a la recta r y el punto P, y a la recta s y al punto P
De la recta r tomamos un punto el A(0,-2,0) y el vector **v** = (3,1,1,). Para el plano Π_1, necesitamos también el vector **AP** = (1,2,2)

$$\Pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)(-1) - (y)(2) + (z-2)(5) = -x - 2y + 5z - 9 = 0$$

De la recta s tomamos un punto el B(2,0,2) y el vector **w** = (2,6,0)**x**(0,1,2) = (12,-4,2) . Para el plano Π_2, necesitamos también el vector **BP** = (2,0,2)

$$\Pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ 12 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (x-1)(-8) - (y)(24-4) + (z-2)(8) = -8x - 20y + 8z - 8 = 0$$

La recta pedida es
$-x - 2y + 5z - 9 = 0$
$-8x - 20y + 8z - 8 = 0$